Применение правил Кирхгофа при расчете электрических цепей

При расчете разветвленных электрических цепей применяют правила Кирхгофа. Таких правил два.

Первое правило Кирхгофа гласит, что *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*.

Токи, идущие к точке разветвления, берем со знаком «+», а токи, отходящие от точки разветвление, со знаком «–» (рис.1).

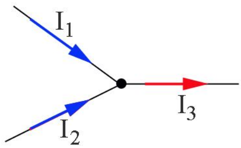

Рис. 1.

Применительно к рис.1 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно написать для каждого из *N* узлов цепи. Однако независимыми являются только *N-1* уравнений, а *N*-е уравнение будет линейной комбинацией первых *N-1* уравнений.

Второе правило Кирхгофа гласит: *в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов* I_k *на сопротивления* R_k *соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э. д. с.* E_k *в контуре*:

$$\sum_{k=1}^{k=m} R_k I_k = \sum_{k=1}^{k=m} E_k, \qquad (2)$$

где m — число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами (рис. 2).

Для составления уравнения (2) необходимо условиться о направлении обхода контура (по часовой стрелке или против нее).

Выбор этого направления совершенно произволен. Все токи I_k, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считают положительными. Э. д. с. E_k источников тока, включенных на различных участках контура, считают положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура.

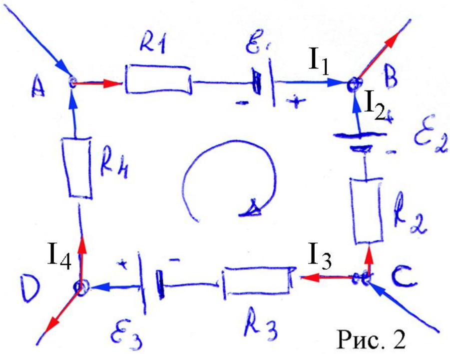

Рис. 2

Так, например, в случае обхода по часовой стрелке замкнутого контура ABCDA, изображенного на рис. 2, уравнение (2) запишется так:

$$I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = E_1 - E_2 + E_3\ .$$

При решении задач рекомендуется следующий порядок расчета сложной цепи постоянного тока:

1. Направления токов во всех участках цепи следует обозначить стрелками, *не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если вычисление покажет, что ток положителен, то его направление указано правильно. Если же ток отрицателен, то его истинное направление противоположно направлению стрелки*.
2. Подсчитать число узлов N в цепи. Записать уравнение (1) для каждого из $N-1$ узлов.
3. Выбрав произвольный замкнутый контур, все его участки следует обойти в *одном выбранном направлении. Если это направление совпадает с направлением стрелки, то слагаемое RI берется со знаком плюс. Если же эти на-*

правления противоположны, то оно берется со знаком минус. Если при обходе источник тока обходится от отрицательного полюса к положительному, то его э. д. с. следует считать положительной; в противном случае ее надо считать отрицательной. Уравнение (2) следует писать не для всех контуров, так как часть из этих уравнений является следствием предыдущих. оказывается, что в разветвленной цепи, состоящей из p ветвей (участков цепи между соседними узлами) и N узлов, число независимых уравнений (2) равно $p-N+1$.

4. *Все э. д. с. и все сопротивления проводов должны входить в систему уравнений.*

Решение задач

Все ниже следующие задачи будем решать в инерциальной системе отсчета (ИСО), связанной с электрической цепью, т. о. рассматриваемая цепь в нашей ИСО будет покоиться.

Задача 1. Вычислить токи в цепи, изображенной на рис. 3, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = R_3 = 6$ Ом, $E = 12$ В, $r = 0$ Ом.

Найти: I_1, I_2, I_3.

Дано:

$R_1 = 3$ Ом,

$R_2 = R_3 = 6$ Ом,

$E = 12$ В,

$r = 0$ Ом.

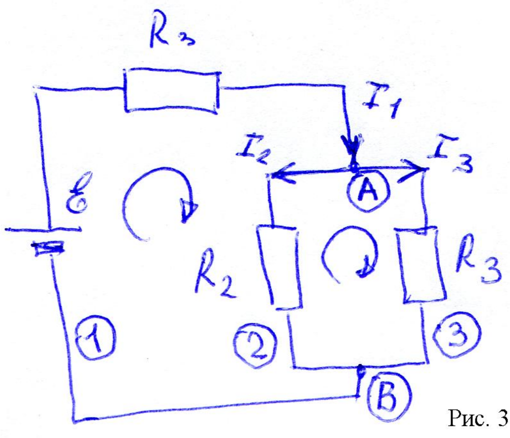

Рис. 3

Решение. Данную задачу можно решить и не прибегая к правилам Кирхгофа. Однако, мы на данной простой задаче и рассмотрим применение правил Кирхгофа. Будем считать, что первый пункт выполнен — токи на схеме изображены. Число узлов N на схеме равно 2 (узлы A и B в кружках).

Число разветвлений p между узлами равно 3 (разветвления 1, 2 и 3 в кружках). Таким образом мы имеем $N-1=1$ уравнение типа (1) и $p-N+1=3-2+1=2$ уравнений типа (2) для контуров. Запишем эти уравнения.

$$I_1-I_2-I_3=0,$$
$$-R_2I_2+R_3I_3=0,$$
$$R_1I_1+R_2I_2=E.$$

Подставив в полученную систему уравнений известные данные и разделив второе равенство на 6 и третье на 3, получим

$$I_1-I_2-I_3=0,$$
$$-I_2+I_3=0,$$
$$I_1+2I_2=4.$$

Решая эту систему уравнений получим: $I_1=2\text{A}$, $I_2=I_3=1\text{A}$.

Задача 2. Два источника с э. д. с. 1,2 и 1,5 В и внутренними сопротивлениями 0,3 и 0,5 Ом параллельно питают активное сопротивление 2 Ом. Определить токи в ветвях электрической цепи.

Найти: I_1, I_2, I_3.

Дано:
$E_1=1{,}2$ В,
$E_2=1{,}5$ В,
$r_1=0{,}3$ Ом,
$r_2=0{,}5$ Ом,
$R=2$ Ом.

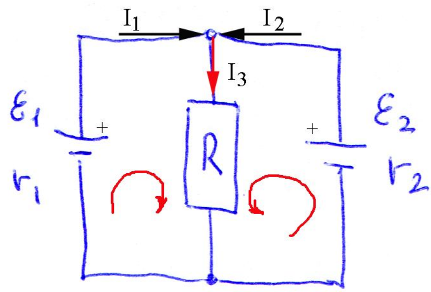

Рис. 4

Решение. Начертив схему (рис. 4) мы видим, что она как и схема (рис. 3) имеет 3 ветви. Значит, мы снова должны составить одно уравнение для узла и два уравнения для контуров. Составим эти уравнения. Так как в каждое уравнение должны входить все неизвестные, во втором и третьем уравнениях мы их запишем с коэффициентом равном нулю. *В дальнейшем мы их явно записывать не будем*.

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 - I_3 = 0, && && I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ &0 \cdot I_1 + r_2 I_2 + RI_3 = E_2, && \text{или} && 0 \cdot I_1 + 0{,}5I_2 + 2I_3 = 1{,}5, \\ &r_1 I_1 + 0 \cdot I_2 + RI_3 = E_1. && && 0{,}3I_1 + 0 \cdot I_2 + 2I_3 = 1{,}2. \end{aligned}$$

Решим данную систему уравнений с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 2 & 1{,}2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 35/3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}6 \end{array}\right).$$

Последняя расширенная матрица удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$I_1 = 0 \text{ А},$$
$$I_2 = 0{,}6 \text{ А},$$
$$I_3 = 0{,}6 \text{ А}.$$

Нулевое значение тока I_1 легко объяснить. Отбросим мысленно левую ветвь на рис. 4. Тогда ток в правом контуре по закону Ома для полной цепи будет

$$I = \frac{E_2}{R + r_2} = \frac{1{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}6 \text{ А}.$$

Падение напряжения на активном сопротивлении будет

$$U_R = IR = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2 \text{ В}.$$

А э. д. с. E_1 тоже равно 1,2 В и ток по левой ветви протекать не будет.

Задача 3. Рассчитать неизвестные токи и э. д. с. E_2 для цепи, изображенной на рис. 5. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Найти: I_1, I_3, E_2.

Дано:

$E_1 = 8$ В,

$E_3 = 5$ В,

$I_2 = 1$ А,

$R_1 = 2$ Ом,

$R_2 = 4$ Ом,

$R_3 = 3$ Ом.

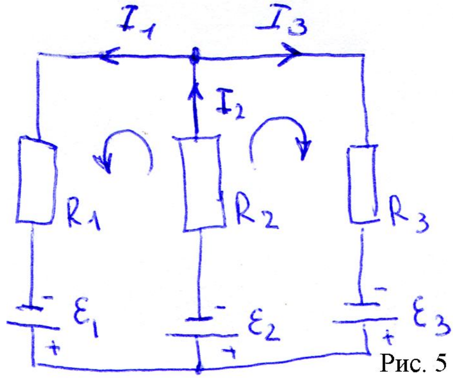

Рис. 5

Решение. Мы снова видим хорошо известную нам схему, состоящую из двух узлов и трех параллельных ветвей. Составим соответствующую схеме систему уравнений:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - E_2,$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_3 - E_2.$$

Подставим в полученную систему уравнений известные величины и перегруппируем систему, перенеся известные величины вправо, а неизвестные — влево.

$$I_1 + I_3 + 0 \cdot E_2 = 1,$$

$$2I_1 + 0 \cdot I_3 + E_2 = 4,$$

$$0 \cdot I_1 + 3I_3 + E_2 = 1.$$

Мы получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными, которую, для разнообразия, решим методом Крамера. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Так как определитель системы уравнений отличен от нуля мы можем воспользоваться методом Крамера. Составим определитель для вычисления тока I_1, для чего первый столбец определителя системы заменим значениями из правой части системы уравнений:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \qquad I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-5} = 1{,}2\ \text{А}.$$

Для тока I_3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{-5} = -0{,}2\ \text{А}.$$

Знак минус говорит о том, что ток I_3 течет в обратную сторону.

Для э. д. с. E_2

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \qquad E_2 = \frac{\Delta_E}{\Delta} = \frac{-8}{-5} = 1{,}6\ \text{В}.$$

Задача 4. В схеме, изображенной на рис. 6а, заданы сопротивления: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 7$ Ом и $E = 36$ В. Определить токи в ветвях схемы. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Внутреннее сопротивление источника э. д. с. считать нулевым.

Найти: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I$

Дано:

$R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом,

$R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 7$ Ом,

$E = 36$ В.

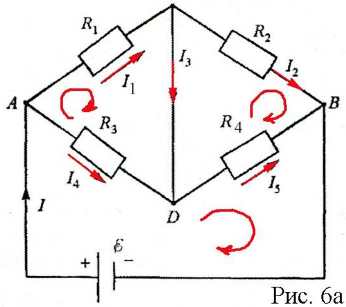

Рис. 6а

Решение. Электрическая схема, представленная на рис. 6а есть не что иное как мостик Уитстона (1802–1875). В реальном мостике Уитстона в диагональ CD включен гальванометр и эта диагональ имеет ненулевое сопротивление. Отличное от нуля сопротивление в реальной схеме имеет источник э. д. с. и подводящие к нему провода. Изменения, внесенные в мостик Уитстона, преследуют цель — показать, что через диагональ CD, имеющую на концах нулевую разность потенциалов $U_{CD} = 0$, тем не менее протекает отличный от нуля ток I_3.

Исследуем нашу цепь. Из рис. 6а мы видим, что у нас имеется $N = 4$ узла, значит мы должны составить $N - 1 = 3$ уравнения типа (1) для узлов A, B и C. Схема также содержит $p = 6$ ветвей и нам надо составить $p - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ уравнений типа (2) для контуров, которые обозначены на рис. 6а.

Итак, составим систему уравнений, отвечающую нашей схеме:

A. $\quad -I_1 - I_3 + I = 0$,

B. $\quad I_2 + I_5 - I = 0$,

C. $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$,

ACDA. $\quad R_1 I_1 - R_3 I_4 = 0$,

BDCB. $\quad R_2 I_2 - R_4 I_5 = 0$,

ADBA. $\quad R_3 I_4 + R_4 I_5 = E$.

Мы получили систему из шести уравнений с шестью неизвестными и решим ее с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы. Пользоваться здесь методом Крамера неудобно, т. к. придется вычислить семь определителе шестого порядка, что довольно утомительно.

Внесем в полученную систему уравнений известные коэффициенты и составим расширенную матрицу, соответствующую данной системе уравнений.

$$-I_1 - I_3 + I = 0,$$

$$I_2 + I_5 - I = 0,$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$
$$2I_1 - 6I_4 = 0,$$
$$3I_2 - 7I_5 = 0,$$
$$6I_4 + 7I_5 = E.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 36 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right).$$

Полученная расширенная матрица соответствует следующей системе уравнений

$$I_1 = 7{,}5 \text{ А}, \; I_2 = 7 \text{ А}, \; I_3 = 0{,}5 \text{ А},$$
$$I_4 = 2{,}5 \text{ А}, \; I_5 = 3\text{А}, \; I = 10 \text{ А}.$$

Задача 5. Два параллельно соединенных элемента с одинаковыми э. д. с. $E_1 = E_2 = 2 \text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 1{,}4$ Ом. Определить токи в ветвях цепи.

Найти: I_1, I_2, I_3.

Дано:

$E_1 = E_2 = 2 \text{ В}$,

$r_1 = 1$ Ом,

$r_2 = 1{,}5$ Ом,

$R = 1{,}4$ Ом.

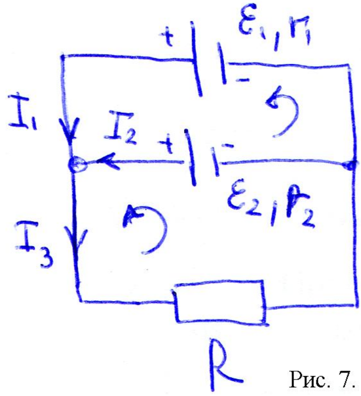

Рис. 7.

Решение. В данной задаче рассматривается параллельное соединение двух источников тока с одинаковыми э. д. с. и разными внутренними сопротивлениями.

Составим уравнения для узла и двух контуров.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$
$$r_1 I_1 - r_2 I_2 = E_1 - E_2,$$
$$r_2 I_2 + R I_3 = E_2.$$

Подставим в полученную систему уравнений заданные величины

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$
$$I_1 - 1{,}5 I_2 = 0,$$
$$1{,}5 I_2 + 1{,}4 I_3 = 2.$$

Решая полученную систему уравнений, например, методом Крамера, получим:

$$I_1 = 0{,}6 \text{ А}, I_2 = 0{,}4 \text{ А}, I_3 = 1 \text{ А}.$$