

Задачи на составление теплового баланса

Решая задачи на данную тему, будем полагать, что изменение внутренней энергии тела равно количеству теплоты, полученной телом. Будем считать теплоту, потраченную на нагревание тела — положительной, а теплоту, выделяемую телом при охлаждении — отрицательной.

При нагревании тела массой m и теплоёмкостью c на ΔT градусов, тело получит количество теплоты

$$Q = cm\Delta T = cm(T_2 - T_1), \quad (1)$$

где $Q > 0$, т. к. $\Delta T > 0$.

При охлаждении тела массой m и теплоёмкостью c на ΔT градусов, тело получит такое же по величине количество теплоты

$$Q = cm\Delta T = cm(T_2 - T_1),$$

где $Q < 0$, т. к. $\Delta T < 0$.

В формулах теплового баланса часто можно увидеть формулы, где температура задана в градусах Цельсия. Учитывая, что в формулы теплового баланса входит не сама температура, а её разность, ясно, что $\Delta t = \Delta T$ и перевод в градусы Кельвина есть только требование решать задачи в системе единиц СИ.

При решении задач данного раздела в качестве инерциальной системы отсчёты (ИСО) будем полагать «лабораторную» систему отсчёта, в которой данные тела будут находиться в покое.

Рассмотрим простейшую задачу на составление теплового баланса.

Задача 1.

2 килограмма воды, взятой при температуре -5°C нагрели до температуры $+20^\circ\text{C}$. Определить количество теплоты, полученной водой.

Решение задачи.

Запишем краткое условие задачи, переводя все данные в систему единиц СИ.

Найти: Q

Дано:

$$m = 2 \text{ кг};$$

$$t_1 = -5^\circ \text{C}, T_1 = 268 \text{ K};$$

$$t_2 = +20^\circ \text{C}, T_2 = 293 \text{ K};$$

$$c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

В нашей задаче вода, нагреваясь, получает некоторое количество теплоты, которое мы вычислим по формуле (1):

$$Q = cm\Delta T = cm(T_2 - T_1)$$
$$Q = 4200 \cdot 2 \cdot (293 - 268) = 210000 \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Дж}$.

Можно рассмотреть обратную задачу, в которой данное количество воды взятое при температуре $t_1 = +20^\circ \text{C}$ охладили до температуры $t_2 = -5^\circ \text{C}$. При охлаждении вода отдаст во внешнюю среду то же самое *по величине* количество теплоты $Q = -2,1 \cdot 10^5 \text{ Дж}$.

Рассмотрим задачу, в которой вода налита в сосуд и при решении задачи надо учитывать поглощаемую им теплоту.

Задача 2.

Алюминиевый сосуд массой 0,5 кг с 2 кг воды имеют начальную температуру $t_1 = -5^\circ \text{C}$. Определить количество теплоты, необходимое для нагревания сосуда с водой до температуры $t_2 = +20^\circ \text{C}$.

Решение задачи.

В данной ситуации нагреваться будут вода, получая количество теплоты Q_1 , (которое мы вычислили в предыдущей задаче) и алюминиевый сосуд, получая количество теплоты Q_2 .

Найти: Q

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг};$$

$$m_2 = 0,5 \text{ кг};$$

$$t_1 = -5^\circ \text{ C}, T_1 = 268 \text{ K};$$

$$t_2 = +20^\circ \text{ C}, T_2 = 293 \text{ K};$$

$$c_1 = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_2 = 896 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Количество теплоты Q_1 возьмём из предыдущей задачи

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_2 - T_1) = 210000 \text{ Дж},$$

Количество теплоты Q_2 вычислим по такой же формуле

$$Q_2 = c_2 m_2 (T_2 - T_1) = 896 \cdot 0,5 \cdot 25 = 11200 \text{ Дж}.$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 210000 + 11200 = 221200 \text{ Дж}.$$

Если есть необходимость записать конечную формулу в общем виде, то она выглядит так

$$Q = Q_1 + Q_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \cdot (T_2 - T_1).$$

Ответ: $Q = 221200 \text{ Дж}$.

Мы рассмотрели процессы нагревания и охлаждения твёрдых и жидких тел. Теперь рассмотрим вычисление теплоты, поглощаемой телом при его плавлении и теплоты, выделяемой телом при его кристаллизации. Температуру, при которой происходит процесс плавления, назовём

температурой плавления, здесь теплота подводится к телу $Q > 0$. Кристаллизация происходит при той же самой температуре, но теплота отводится от тела $Q < 0$.

Количество теплоты, поглощаемое телом массы m при плавлении, определяется формулой

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m. \quad (2)$$

Здесь λ — удельная теплота плавления, т. е. количество теплоты, необходимое для плавления единицы массы вещества при температуре плавления.

Количество теплоты, выделяемое телом массы m при кристаллизации, определяется формулой

$$Q_{\text{кр}} = -\lambda m.$$

Задача 3.

Их 3 кг льда взятого при температуре -20°C получили воду с температурой $+50^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты необходимо для осуществления этого процесса?

Решение задачи.

Найти: Q

Дано:

$$m = 3 \text{ кг};$$

$$t_1 = -20^\circ\text{C}, T_1 = 253 \text{ К};$$

$$t_2 = +50^\circ\text{C}, T_2 = 323 \text{ К};$$

$$t_0 = 0^\circ\text{C}, T_0 = 273 \text{ К};$$

$$c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{\text{л}} = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

Анализируя условие задачи, мы видим, что наш процесс состоит из трёх частей:

нагревания льда до температуры плавления

$$Q_1 = c_{\text{л}} m (T_0 - T_1) = 1,26 \cdot 10^5 \text{ Дж} ;$$

плавления льда при температуре плавления

$$Q_2 = \lambda m = 10,05 \cdot 10^5 \text{ Дж} ;$$

нагревание получившейся воды до заданной температуры

$$Q_3 = c_{\text{в}} m (T_3 - T_0) = 6,3 \cdot 10^5 \text{ Дж} .$$

Полное количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 17,61 \cdot 10^5 \text{ Дж} .$$

Общая формула

$$Q = c_{\text{л}} m (T_0 - T_1) + \lambda m + c_{\text{в}} m (T_3 - T_0) .$$

В данной задаче все три процесса связаны с получением системой теплоты, поэтому все три составляющие — положительные.

Ответ: $Q = 17,61 \cdot 10^5 \text{ Дж}$.

Рассмотри теперь процесс испарения (кипения). Кипение жидкостей происходит при постоянной температуре, называемой температурой кипения.

Количество теплоты, поглощаемое телом массы m при испарении определяется формулой

$$Q_{\text{исп}} = r m . \quad (3)$$

Здесь r — удельная теплота парообразования.

Количество теплоты, выделяемое телом массы m при конденсации определяется формулой

$$Q_{\text{конд}} = -r m .$$

Задача 4.

Вычислить количество теплоты, необходимое для испарения 3 кг льда взятого при температуре -20°C .

Решение.

Данная задача отличается от задачи 3 лишь тем, что здесь присутствует ещё один процесс — испарение.

Найти: Q

Дано:

$$m = 3 \text{ кг};$$

$$t_1 = -20^\circ \text{ C}, T_1 = 253 \text{ K};$$

$$t_0 = 0^\circ \text{ C}, T_0 = 273 \text{ K};$$

$$t_2 = +100^\circ \text{ C}, T_2 = 373 \text{ K};$$

$$c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_{\text{л}} = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг};$$

$$r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

Анализируя условие задачи, мы видим, что наш процесс состоит из четырёх частей:

нагревания льда до температуры плавления

$$Q_1 = c_{\text{л}} m (T_0 - T_1) = 1,26 \cdot 10^5 \text{ Дж};$$

плавления льда при температуре плавления

$$Q_2 = \lambda m = 10,05 \cdot 10^5 \text{ Дж};$$

нагревание получившейся воды до температуры кипения

$$Q_3 = c_{\text{в}} m (T_2 - T_0) = 12,6 \cdot 10^5 \text{ Дж};$$

испарение получившейся воды

$$Q_4 = r m = 67,8 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Полное количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 91,71 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Общая формула

$$Q = c_{\text{л}} m (T_0 - T_1) + \lambda m + c_{\text{в}} m (T_3 - T_0) + r m.$$

Ответ: $Q = 91,71 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$

Рассмотрев на простейших задачах все основные процессы, встречающиеся при решении задач на составление уравнения теплового баланса, рассмотрим более сложные задачи.

Задача 5.

В термостат, содержащий 2 кг воды и 0,5 кг льда при температуре 0° С добавили 1 кг воды с температурой +60° С. Определить установившуюся температуру.

Решение.

В дальнейшем будем обозначать установившуюся температуру (температуру смеси) греческим символом θ (тэта).

Найти: θ

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг};$$

$$m_2 = 0,5 \text{ кг};$$

$$m_3 = 1 \text{ кг};$$

$$t_1 = 0^\circ \text{ C}, T_1 = 273 \text{ К};$$

$$t_2 = +60^\circ \text{ C}, T_2 = 333 \text{ К};$$

$$c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

Составлять сразу уравнение теплового баланса в таких задачах опасно, т. к. неясно, хватит ли количества теплоты, содержащейся в горячей воде расплавить лёд. Поэтому, сначала оценим, какое количество теплоты может отдать горячая вода и получить лёд.

Количество теплоты, необходимое для плавления льда,

$$Q_1 = \lambda m_2 = 1,675 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, отданное горячей водой при охлаждении до 0° С,

$$Q_0 = cm_3(T_2 - 273 \text{ К}) = 2,52 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Мы видим, что запас теплоты у горячей воды больше, чем надо для плавления льда, следовательно, весь лёд растает, и вода массой $m_1 + m_2$ нагреется до некоторой температуры θ , а горячая вода охладится до этой температуры.

Составим уравнение теплового баланса. Договоримся положительные количества теплоты писать в левой, а отрицательные — в правой части теплового баланса.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3. \quad (*)$$

Количество теплоты, которое получит исходная вода и вода от растаявшего льда до температуры смеси θ

$$Q_2 = c(m_1 + m_2) \cdot (\theta - T_1).$$

Количество теплоты, которое отдаст горячая вода при охлаждении до температуры смеси θ

$$Q_3 = cm_3(T_2 - \theta).$$

Подставим в уравнение теплового баланса (*) выражения для Q_1, Q_2, Q_3 :

$$\lambda m_2 + c(m_1 + m_2) \cdot (\theta - T_1) = cm_3(T_2 - \theta),$$

откуда

$$\theta = \frac{c(m_1 + m_2)T_1 + cm_3T_2 - \lambda m_2}{c(m_1 + m_2 + m_3)} = 278,7 \text{ К.}$$

Ответ: $\theta = 278,7 \text{ К.}$